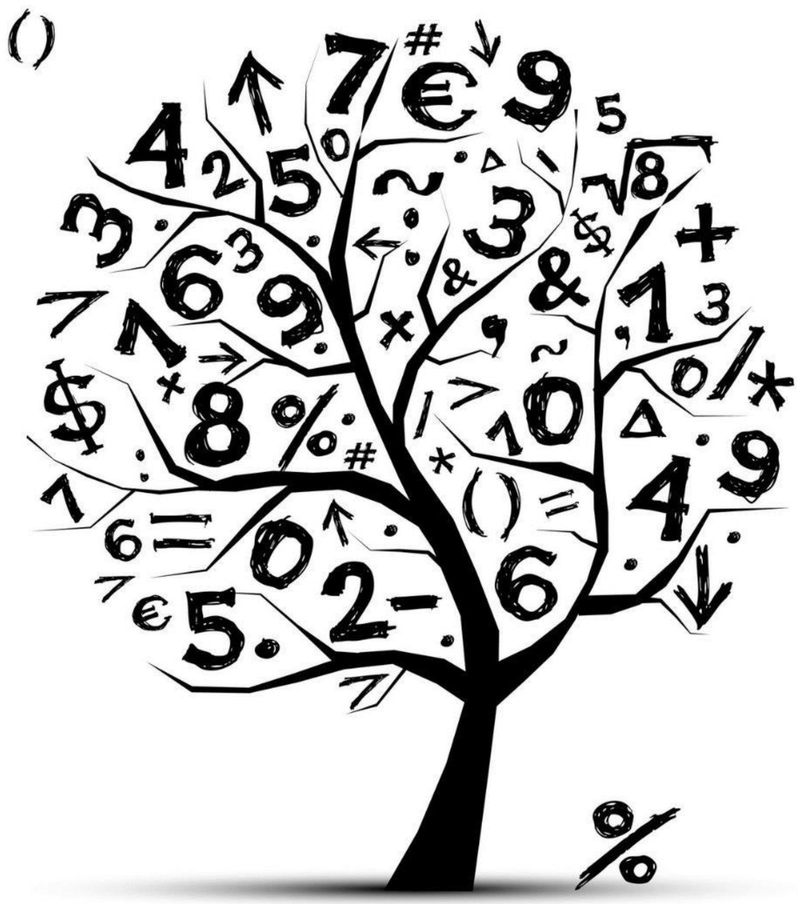
IV

# ÁLGEBRA



CEAP

Centro de Estudios
Académicos y Profesionales

# Álgebra

## Módulo I



Dibujo de Portada Dreamstime.

# Presentación

El álgebra es una de las ramas de las matemáticas más importantes, pues su uso está presente en la vida cotidiana; por ejemplo, cuando calculas los intereses que debes pagar de una deuda, al calcular el costo de una prenda en descuento, al aprovechar el 3 por 2 en el supermercado, todos estos y muchos casos más, requieren de álgebra.

La palabra álgebra proviene del título de un libro *Al-jabr w'al-muqabalah,* escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi.

Etimológicamente, la palabra álgebra es de origen árabe que significa "recomposición" o "reintegración". El álgebra procede desde las civilizaciones de Babilonia y Egipto, antes de Cristo, las cuales usaban dicho método para resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Luego, continuó en la antigua Grecia, los griegos usaban el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas, por ejemplo, el teorema de Pitágoras. Los matemáticos que fundamentaron los cimientos de esta ciencia fueron Arquímedes, Herón y Diofante.

En la actualidad, el álgebra se usa para el planteamiento de operaciones generalizadas, las cuales emplean números, letras y signos que representan simbólicamente un número u otra entidad matemática.

La presente guía, sintetiza parte de los temas introductorios del álgebra, divididos en una sección teórica y una práctica. Este material, está diseñado para que el alumno adquiera los conocimientos necesarios para aprobar la parte del examen correspondiente a esta disciplina; no obstante, este deberá invertir tiempo de calidad para conseguir la suficiente destreza en la materia.

# Índice

# Generalidades del Álgebra

## 1. Álgebra

El álgebra es una extensión de la aritmética en la cual se desconoce el valor de una de las cantidades con las que se opera. Es la rama de las matemáticas que estudia estructuras, relaciones y cantidades.

Se trabaja con las mismas reglas que en la aritmética agregando un par de conceptos tales como las formulas y las ecuaciones. En el Álgebra se estudia los números del modo más general posible.[1]

### 1.1 Notación

El álgebra hace uso de letras y números para representar cantidades.

- Los **números**, son usados para representar cantidades cuyo valor es conocido o determinado.
- Las **letras**, son empleadas para representar cantidades cuyo valor es conocido o desconocido.

Por regla general, las primeras letras del abecedario se emplean para hacer referencia a **cantidades conocidas**: a,b,c,d,e,…

*Ejemplo:*

Calcula el área del cuadrado cuyo valor es b=6cm

[1] Disponible en: http://www.aulafacil.com/cursos/l10924/ciencia/matematicas/algebra/introduccion

Recordando la fórmula para obtener el área del cuadrado tenemos:

A= l x l

Entonces:

A= 6 x 6 =36 $cm^2$

b=6 cm

Como se refiere en el ejemplo, el valor de cada lado del cuadrado es representado por una letra, no obstante, este es conocido ya que es una premisa del problema.

Las **cantidades desconocidas** reciben el nombre de incógnitas y el valor de estas se determina a través de operaciones algebraicas. Las letras que las representan suelen ser las últimas en el abecedario: u,v,w, x, y, z

*Ejemplo:*

Determina el valor de x, el cual da solución a la siguiente ecuación:

Incógnita

$$X+8=56$$

*Solución:*

$$X+8=56$$

$$X=56-8$$

$$X=48$$

## 1.2 Fórmulas

Son estructuras algebraicas las cuales suelen constar de letras, números y operadores matemáticos.

*Ejemplo:*

Calcula el área de un círculo de radio conocido *r*=2 cm.

Aplicamos la fórmula para obtener el área:

$$Área = \pi * r^2$$

Fórmula algebraica

$$Área = \pi * r^2 = \pi * 2^2 = 12{,}57\ cm^2$$

### 1.3 Coeficiente

Se le llama coeficiente al número o literal que multiplica a una variable (dicha variable por lo regular suele ser una literal) e indica la cantidad de veces que se debe multiplicar dicha variable.

*Ejemplo 1:*

Coeficiente ← $3\,x^2$

Variable

En el ejemplo anterior, el coeficiente de la expresión algebraica es 3 y la variable es $x^2$, el 3 indica la cantidad de veces por las que está multiplicada la variable (literal).

*Ejemplo 2:*

Coeficiente ← $a\,c^3$

Variable

En el ejemplo 2 de esta sección, el coeficiente de la expresión algebraica es $a$ y la variable es $c^3$, en términos algebraicos, estamos diciendo que $c^3$ debe multiplicarse a-veces.

Del ejemplo *1 y 2* podemos concluir que existen dos tipos de coeficientes, los que se representan con letra (a los que llamaremos **coeficientes literales**) y los que se expresan por medio de números (**coeficientes numéricos**).

### 1.4 Signos

Al igual que en aritmética[2], en algebra se emplean los símbolos de operación, relación y agrupación:

- Operación: suma (+), resta (-), multiplicación (x), división (÷), extracción de raíces (√) y potencias.

[2] En este apartado no se desarrolla en tema, pues ya se ha hecho en el apartado 1,1.2 de la guía de Aritmética.

- Relación: igual (=), diferente (≠), mayor (>), menor (<), mayor que (≥), menor que (≤).
- Agrupación: paréntesis ( ), llaves { } y corchetes [ ].

### 1.5 El cero

El número cero es una de las representaciones numéricas más importantes en el álgebra. Tuvo su primera aparición en la cultura de la India hace 17 000 años, no obstante, su incorporación en los cálculos matemáticos, tardó unos 2 000 años más.

El símbolo que lo representa es "0" y es empleado para referir a la ausencia de una cantidad o valor nulo.

El cero juega un papel trascendente dentro de lagunas de las operaciones básicas, por ejemplo:

- En la **suma**, el cero es el elemento neutro, es decir, cualquier número a al que se le sume el cero, vuelve a resultar a.

  *Ejemplo:*

  $20 + 0 = 20;$

  $0 + 598 = 598$

- En la **multiplicación**, el cero es conocido como el elemento absorbente, ya que cualquier número *a* que sea multiplicado por cero, este dará como resultado cero.

  *Ejemplo:*

  $9 \text{ x } 0 = 0;$

  $0 \text{ x} 10 = 0$

- En la **división**, el cero dividido entre cualquier número a, siempre dará como resultado cero,

  *Ejemplo:*

  $0 \div 10 = 0;$

  $0 \div 240 = 0$

El cero es el único número por el que no se puede dividir.

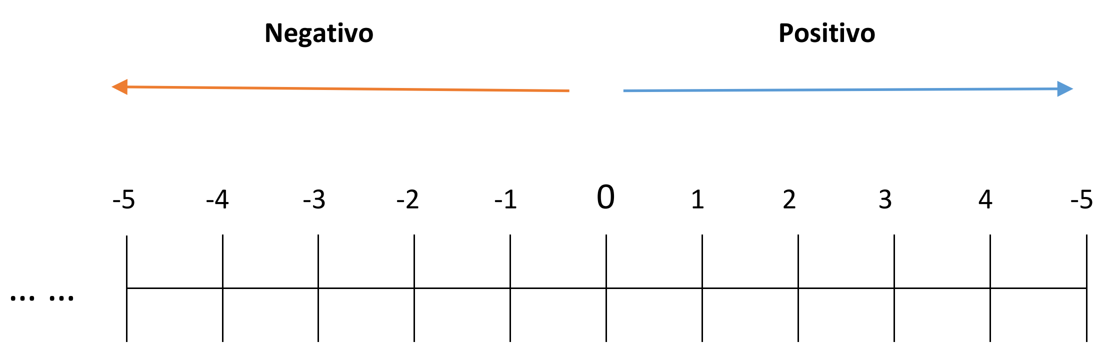
*Ejemplo:*

*20 ÷ 0 = No se puede realizar la operación*;

$89 \div 0 =$ *No se puede realizar la operación*

## 1.6 Representación gráfica de los números

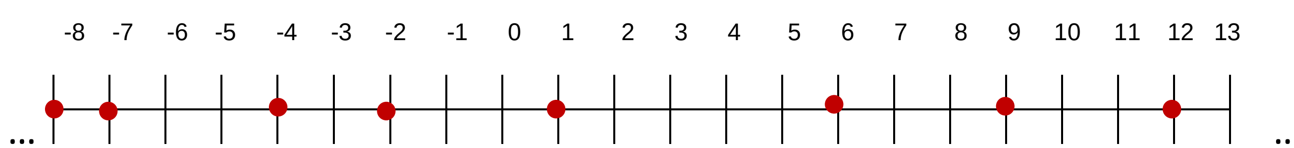
Teniendo en cuenta que el 0 en Álgebra es la ausencia de la cantidad, que las cantidades positivas son mayores que 0 y las negativas menores que 0, y que las distancias medidas hacia la **derecha** o hacia **arriba** de un punto se consideran **positivas** y hacia la izquierda o hacia debajo de un punto **negativas,** la serie algebraica de los números se puede representar de este modo (Baldor, 2005):




*Ejemplo:*

En la recta numérica, representa las siguientes cantidades: 6, 9, -4, -8, 1, -7,12, -2

*Solución:*




En la recta se han señalado a través de puntos rojos, cada una de las cantidades que nos piden.

## Ejercicio 1

Contesta las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál consideras que es la importancia del álgebra dentro de las matemáticas?
b) Enuncia 3 ejemplos de tu vida cotidiana en donde hagas uso del álgebra.
c) Por medio de lenguaje algebraico representa 4 números conocidos cualesquiera.
d) Por medio de lenguaje algebraico representa 4 números desconocidos cualesquiera.
e) Expresa 4 fórmulas algebraicas que permitan calcular el área de algunas figuras geométricas.

Representa las siguientes expresiones

f) Expresión algebraica cuyo coeficiente es 7 y su variable es un número desconocido a la séptima potencia.
g) Expresión algebraica cuyo coeficiente es a y sus variables son el producto de dos números conocidos elevados ambos al cuadrado.
h) En la recta numérica representa las siguientes cantidades: 2, 4, 9, 1.5, -3.7, -2.2. 6.5.

## Tarea 1

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $8 + (3 + 4 - 2) = 8 + 3 + 4 - 2 =$

b) $15 - (9 + 3 - 7) = 15 - 9 - 3 + 7 =$

c) $(15 - 4) + 3 - (12 - 5 \cdot 2) + (5 + 16 / 4) - 5 + (10 - 2^3)$

d) $[15 - (2^3 - 10 / 2)] \cdot [5 + (3 \cdot 2 - 4)] - 3 + (8 - 2 \cdot 3)$

Coloca el signo de relación según corresponda

e) 9.34 __ 7

f) 90867__ 83901

g) 56789 ___56788

h) 9876535__98763

## 2. Término

El término es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo + o -.

*Ejemplo:*

- $a, 3b, 2xy, \frac{4a}{3x}$ *son términos*

Los **elementos de un término** son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Por el signo, son termino positivos los que van precedidos de signo + y negativos los que van precedidos del signo -. Así, +a, +8x, +9ab son términos positivos; por otro lado, -x, -5bc y $-\frac{3a}{2b}$ son términos negativos.

El signo + suele omitirse delante de los términos positivos. Así, $a$ equivale a $+a$; $3ab$ equivale a $+3ab$ .

Por lo tanto, *cuando un término no va precedido de ningún signo es positivo*.

El **coeficiente**, como se dijo antes, generalmente es el primer elemento de los factores del término. Así, en el término $5a$ el coeficiente es 5; en $-3a^2x^3$ el coeficiente es -3-

La parte literal la constituyen las letras que hayan en el término. Así en $5xy$ la parte literal es xy; en $\frac{3x^3y^4}{2ab}$ la parte literal es $\frac{x^3y^4}{ab}$ (Baldor, 2005).

### 2.1 Grado de un término

Se le llama grado de un término al número que resulta de sumar los exponentes de cada una de las variables que conforman a dicho término.

*Ejemplo:*

| Término | Suma de exponentes | Grado del término |
|---|---|---|
| $3\ x_5\ y_4\ z$ | 5+4+1 | 10 |
| $45\ abx^5\ y^4\ z$ | 1+1+5+4+1 | 12 |
| $8\ ab_5c\ x_3y_4\ z$ | 1+5+1+3+4+1 | 15 |

## 2.2 Clasificación de los términos

Existen 4 tipos de términos; los enteros, los fraccionarios, los irracionales y los homogéneos.

- Enteros: Son aquellos que no tienen un denominador literal: $8\ ab_5c\ x_3y_4\ z$, 3 $a$, $\frac{3ab}{6}$, este último, aunque se representa por medio de una fracción, el denominador es un número.
- Fraccionarios: Este tipo de términos se representan como una fracción y el denominador será siempre una literal $\frac{3ab}{a}, \frac{9xy}{x}$, *etc.*
- Irracionales: Son aquellos que tienen radicales, puede representarse como enteros o fraccionarios $\sqrt{xy}$ , $\frac{\sqrt{ab}}{a}$ , $\frac{9y}{\sqrt[4]{6x}}$
- Heterogéneos: Son los que tienen el mismo grado, $8\ ab^5c\ x^3y^4\ z$ y $8\ a^9b^5c$ son dos términos homogéneos, ya que ambos son de grado 15.

## Ejercicio 2

1. Completa los campos de la siguiente tabla

| Término | Coeficiente | Suma de exponentes | Grado del término |
|---|---|---|---|
| $19\ ab\ x^5\ y^4$ | | | |
| $a_4bx_5\ c_3\ y_4\ z$ | | | |
| $8\ ab_5c\ x_3y_4\ z$ | | | |
| | 5 | 2+1+4+5+6+8 | |
| | 9 | 4+4+1+1+1+3 | |
| | 11 | 2+3+5+1+1 | |

2. Di si los términos siguientes corresponden a uno fraccionario, homogéneo, entero o irracional.

   a) $\frac{312qb}{4}$

   b) $\frac{8y}{\sqrt[4]{x}}$

   c) $23\ abc^2$

   d) $\frac{2xy}{4x}$

# Clasificación de las expresiones algebraicas

3. **Monomios, Binomios, Trinomios, Polinomios.**

En algebra se reconocen varias clasificaciones con respecto al número de términos, entre ellas las siguientes:

- ***Monomio:*** es la expresión algebraica compuesta de un solo término.

*Ejemplo:*

$$3\ ab,\ 4\ xyz,\ 3x^2y^4z^2$$

- **Binomio**: es la expresión algebraica compuesta de dos términos y se reconocen porque entre ellos existe un signo de más (+) o menos (-) que los separa.

Ejemplo:

$$3\ ab + 4\ xyz$$

$$3x^2y^4z^2 - 6xy$$

$$13\ abx + 9xyz$$

- **Trinomio:** es la expresión algebraica compuesta de tres términos y se reconocen porque entre ellos existe un signo de más (+) o menos (-) que los separa.

$$3\ ab + 4\ xyz + 6\ ab^2$$

$$3x^2y^4z^2 - 6xy + x^2$$

$$3ac^5 + 13\ abx - 9xyz$$

- **Polinomio:** es la expresión algebraica compuesta de cuatro o más términos y se reconocen porque entre ellos existe un signo de más (+) o menos (-) que los separa.

$$3\ ab + 4\ xyz + 6\ ab^2 + 8xy$$

$$xy + 45abz + 3x^2y^4z^2 - 6xy + x^2$$

$$9ab3 + 3ac5 + 13\ abx - 9xyz + 7xy + 8c^5z$$

### 3.1 Monomios semejantes

Los monomios cuyas literales y exponentes son iguales se les conoce como semejantes.

*Ejemplo 1:*

$6x^2$ y $-10x^2$

6 $\boxed{x^2}$ Las literales y los exponentes son iguales; por lo tanto, los monomios son semejantes

-10 $\boxed{x^2}$

*Ejemplo 2:*

$8x^2y$ y $2x^2y^2$

8 $\boxed{x^2y}$ Las literales son iguales, no así los exponentes; por lo tanto, los monomios no son

2 $\boxed{x^2y^2}$ son semejantes.

### 3.2 Operaciones con monomios

Se pueden revisar 5 operaciones básicas con los monomios: suma, resta, división, multiplicación y potencias.

### 3.3 Suma y Resta de monomios

En cuanto a la suma y resta con monomios, solo se pueden sumar o restar aquellos que son semejantes.

La suma (o resta) de monomios semejantes se realiza sumando (o restando) los coeficientes y conservando la o las literales como base.

*Ejemplo*:

$$4x + 9x =$$

El ejemplo de arriba esta compuesto de dos monomios, a este tipo de expresiones se les conoce como **binomio.**

Los términos $4x$ y $9x$ son semejantes ya que las literales son las mismas al igual que el exponente de estas; por lo tanto, la suma se realiza atendiendo los siguientes pasos:

1. Se suman o se restan los coeficientes de los términos.
2. Se pasa (sin hacer ningún tipo de operación) la literal y su exponente

A continuación, se llevará a cabo la suma del binomio.

$\underbrace{4x + 9x}= 13\,x$ $\longrightarrow$ La literal se conserva (paso 2)

Sumamos los coeficientes (paso 1)

*Ejemplo 2:*

$\underbrace{9x^2y^3 + 13x^2y^3} = 22x^2y^3$ $\longrightarrow$ Las literales se conservan (paso 2)

Sumamos los coeficientes (paso 1)

*Ejemplo 3:*

$\underbrace{519x^2y^3z - 333\,x^2y^3\,z} = 186x^2y^3\,z$ $\longrightarrow$ La literal se conserva (paso 2)

Restamos los coeficientes (paso 1)

*Ejemplo 4:*

Dos monomios no podrán ser sumados o restados si no son semejantes

$59x^2y^3z - 56\,x^2y^3 = 59x^2y^3z - 56\,x^2y^3$

Las literales de los monomios son distintos; por lo tanto, la operación resultante será la premisa de la igualdad.

### 3.4 Producto de un número por un monomio

En el producto de un número por un monomio, se multiplican los coeficientes y se conserva la parte literal sin hacer algún tipo de operación.

Lo mismo sucede en el caso de un binomio, trinomio o polinomio, siempre y cuando los signos de agrupación afecten encierren a los demás términos.

*Ejemplo 1:*

- Un número por un monomio

$$3\,(2x^3) = 6\,x^3$$

Multiplicamos los coeficientes y la literal y su exponente se conservan

*Ejemplo 2:*

- Un número por un binomio

$$4\,(4x^6 + 5x^4) = 16\,x^6 + 20\,x^4$$

El número cuatro debe multiplicar a cada uno de los términos

*Ejemplo 3:*

- Un número por un trinomio *

$$3\,(4x^7 + 5x^6 - 6x^5) = 12x^7 + 15\,x^6 - 18\,x^5$$

El número tres debe multiplicar a cada uno de los términos

* El caso del polinomio por un número, el procedimiento es análogo al del binomio y trinomio, el número multiplica a cada término.

### 3.5 Producto entre monomios

Para realizar el producto entre monomios, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las literales que sean iguales, tal y como se muestra a continuación:

$$ax^n * bx^m = (a * b)\, x^{n+m}$$

*Ejemplo 1:*

$$(10x^2y^3z) \cdot (4y^2z^2) = (10 \cdot 4)\, x^2y^{3+2}z^{1+2} = 10x^2y^5z^3$$

Se suman los exponentes de las literales que son iguales y se conserva la misma (en el ejemplo, *y* y *z* se presentan en ambos monomios por lo que se deben sumar sus exponentes). Cuando hay literales que no son iguales se pasan de manera directa ($x^2$ se presenta en el primer monomio, pero no en el segundo por los que se pasa de forma directa la literal con su exponente).

*Ejemplo 2:*

$$(9a^2b^4y^7z) \cdot (9by^2z^2)= (9*9)\, a^2b^{4+1}y^{7+2}z^{1+2} =81a^2b^5y^9z^3$$

Del ejemplo 1 y 2 se puede concluir lo siguiente:

- Se multiplican los coeficientes (atendiendo a la ley de los signos)
- Se prosigue a verificar en el primer monomio las literales, si estas aparecen en ambos monomios, se suman los exponentes y se conservan las literales como base.
- Si la literal solo aparece en uno de los monomios, esta se pasa de forma directa sin realizar ninguna operación.

### 3.6 División de monomios

En la división de monomios, solo se podrá realizar esta operación siempre que:

- Los monomios tengan la misma parte literal.
- El grado del dividendo es mayor o igual al divisor.

Para efectuar una división de monomios se ejecutan los pasos siguientes:

- Se dividen los coeficientes, si resulta un número decimal, este se deja expresado como facción (Ver *ejemplo 1*).
- Las literales que sean iguales podrán dividirse, esta operación se realiza conservando la literal como base y restando los exponentes (Ver *ejemplo 2*).
- Si los exponentes de las literales del dividendo son mayores que los del divisor, estos se restan (Ver *ejemplo 2*).
- Si los exponentes de las literales del dividendo son menores que los del divisor, estos se restan; no obstante, el resultado final será una fracción (Ver *ejemplo 4*).

*Ejemplo 1:*

$$\frac{9\,x^3y^4z^2}{4x^2y^2z^2} = (9 \div 4)\ x^{3-2}y^{4-2}z^{2-2} = \frac{9}{4}xy^2$$

En el ejemplo anterior, las literales del dividendo y el divisor son las mismas (*x, y, z*) , por lo que estas pasan como base y sólo se restan los exponentes de ellas.

La división de los coeficientes (*9 y 4*) resulta 2.25, lo correcto es dejar expresada esta operación; es decir, el resultado de 9 ÷ 4 deberá escribirse como $\frac{9}{4}$.

*Ejemplo 2:*

$$\frac{12\,wx^3y^4z^3}{3xy^3z^2} = (12 \div 3)\ wx^{3-1}y^{4-3}z^{3-2} = 4wx^2yz$$

En este caso, la división de los coeficientes (12 y 3) da un número entero, por lo que debe escribirse como resultado.

Existen 3 literales que están tanto en el dividendo como en el divisor (*x,y* y *z*); por lo tanto, se procede a restar sus exponentes y se pasan de forma directa las literales que se presenten solo en uno de los monomios.

*Ejemplo 3:*

$$\frac{24\,x^3y^4z^3}{8x^5y^2z^4} = (24 \div 8)\,x^{3-5}y^{4-2}z^{2-2} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$$

En el ejemplo 3, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las literales iguales, en el caso de los exponentes de *x* el exponente del dividendo es menor que el del divisor (3<5) por lo tanto el resultado se pone como denominador; lo mismo ocurre con los de z ( 3<4).

### 3.7 Potencia de monomios

Cuando un monomio esta elevado a una potencia, el coeficiente se eleva a la potencia indicada y la potencia de la literal se multiplica por la potencia, tal y como se muestra a continuación:

La literal *x* se pasa como base y su potencia *n* se multiplica por la potencia *m*

$$(a\,x^n)^{m} = a^m * x^{n*m}$$

El coeficiente a se eleva a la potencia m

*Ejemplo 1:*

La literal *x* se pasa como base y su potencia *2* se multiplica por la potencia *3*

$$(4x^2)^3 = 4^3 \cdot x^{2*3} = 64x^{6}$$

El coeficiente *4* se eleva a la

*Ejemplo 2:* potencia *3*

La literal *x* se pasa como base y su

potencia *1* se multiplica por la

potencia *3.* Análogamente*,* la literal *y*

se pasa como base y su potencia 2

se multiplica por la potencia 3.

$$(-9\,xy^2)^3 = (-9\,)^3 \cdot x^{1*3}\,y^{2*3} = -729\ x^3y^6$$

El coeficiente *-9* se eleva a la potencia *3*

## Ejercicio 3

Contesta las siguientes cuestiones:

a) Escribe 3 monomios diferentes.
b) Escribe 3 binomios diferentes.
c) Escribe 3 trinomios diferentes.
d) Escribe 3 polinomios diferentes.
e) Escribe 3 monomios semejantes.
f) Resuelve las siguientes operaciones con monomios

- $989x^2+47x^2=$
- $56xy+98x^2y=$
- $589x^5y^3z-356\,x^5y^3z=$
- $628x^6y+56x^7y=$
- $3\,(989x^2+47x)=$
- $2(x^3+6) =$
- $\frac{18\,x^4y^4z^2}{6x^2y^2z^2} =$
- $\frac{24x^2y^4z^2}{6x^6y^8z^2} =$
- $(2x^2)^5 =$

## TAREA 3

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $5x - (8x - 2x)=$

b) $8x - (2x - 1)=$

c) $(2x + 3x) - (7x - 2x)=$

d) $(6x - 2) - (4x - 2)=$

e) $5x^2 - (x + x^2)=$

f ) $(-5a^2)(7ab)=$

g) $(12x^5) \div (3x^2)=$

h) $(16x^6y^4) \div (4xy^5)=$

Dados los siguientes monomios A= $8x^2$ , B= $-4\ x^4$ y C= $2x$, resuelve:

a) $A + B$

b) $3A\ + 2B + C$

c) $(B)^2$

### 4. Igualdad

Se le llama igualdad al hecho de comparar dos cantidades o expresiones algebraicas a través del signo =, y cuyo valor de las cantidades o expresiones algebraicas es el mismo.

*Ejemplo 1:*

*ab=cd* La expresión *se lee, el producto de ab es igual al producto de cd.*

$3x^4=2x^4+6$ La expresión *se lee,* $3x^4$ *es igual a* $2x^4+6$

### 5. Ecuación

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas a las que se les llama miembros de la ecuación.

Una ecuación suele estar compuesta por números y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

*Ejemplo 1:*

Términos

$$\underbrace{2x^4+6}_{\text{Miembro izquierdo}} = \underbrace{288}_{\text{Miembro derecho}}$$

*Ejemplo 2:*

Términos

$$\underbrace{52xy^2+7}_{\text{Miembro izquierdo}} = \underbrace{288xy}_{\text{Miembro derecho}}$$

### 5.1 Grado de una ecuación

El grado de una ecuación está determinado por la potencia más alto de cualquiera de los términos que la conforman.

*Ejemplo 1:*

$$8x^6+7x^5=278$$

El exponente más alto de los términos es 6; por lo tanto, la ecuación es de grado 6

*Ejemplo 2:*

$$x^9+7x^5=154$$

El exponente más alto de los términos es 9; por lo tanto, la ecuación es de grado 9

### 5.2 Despeje en una ecuación

El objetivo de una ecuación es que a través de ciertos procedimientos (los cuales son operaciones matemáticas), se determine el valor de la(s) incógnita(s) de dicha ecuación.

Para lo anterior, a través de operaciones matemáticas, se busca separar la incógnita de los demás términos de la ecuación, incluso de su propio coeficiente, a este proceso se le conoce como despeje.

Para despejar una incógnita de una ecuación de deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Determinar la incógnita que deseamos despejar.
- **Paso 2:** Poner de un lado de la igualdad el o los términos con incógnita y del otro los valores numéricos.

En este paso es importante señalar que, al despejar cualquier valor numérico o término, esta pasa al otro lado de la igualdad realizando la operación contraria. Tal y como se muestra en el cuadro siguiente:

| **Lado izquierdo de la igualdad** | **Pasa al otro lado de la igualdad** | **Lado derecho de la igualdad** |
|---|---|---|
| Si está sumando | Pasa al otro lado de la igualdad | Restando |
| Si está restando | Pasa al otro lado de la igualdad | Sumando |
| Si está multiplicando | Pasa al otro lado de la igualdad | Dividiendo |
| Si está dividiendo | Pasa al otro lado de la igualdad | Multiplicando |

- **Paso 3:** Separar el coeficiente asociado a la incógnita mandándolo al otro lado de la igualdad con la operación contraria.

*Ejemplo:*

Despeja la incógnita de la ecuación $9x + 3 = 30$

- **Paso 1**: Determinar la incógnita que deseamos despejar, en este caso será $X$
- **Paso 2:** Poner de un lado de la igualdad el o los términos con incógnita y del otro los valores numéricos.

Debemos de pasar al otro lado de la igualdad los valores numéricos y como el 3 está sumando, pasa del otro lado de la igualdad restando.

$$9x + 3 = 30$$

$$9x+3=30-3$$

$$9x = 30 - 3 = 27$$

$$9x = 27$$

- **Paso 3:** Separar el coeficiente asociado a la incógnita mandándolo al otro lado de la igualdad con la operación contraria.

El coeficiente 9 está multiplicando a
la incógnita, entonces debe pasar al
otro lado de la igualdad dividiendo

$$9x = 27$$

$$x = \frac{27}{9}$$

$$x = 3$$

Por lo tanto, a través de una serie de despejes hemos encontrado el valor de la incógnita x; es decir, hemos resuelto la ecuación y, como es una ecuación de primer grado, podemos concluir que hemos hecho una resolución de ecuación de primer grado.

### 5.3 Sustitución

En matemáticas, la palabra sustitución indica el hecho de reemplazar el valor encontrado de una incógnita, donde esta aparezca.

En el ejemplo anterior, el valor encontrado de la incógnita fue 3, así (y como una forma de comprobar que realizamos bien los despejes), debemos sustituir dicho valor en cada uno de los términos de la ecuación original donde aparezca la incógnita. Es decir,

$9x+3=30$ → Ecuación original

$9(3)+3=30$

Sustituimos el valor que hemos encontrado de x
en la ecuación original

$27+3=30$ → Realizamos las operaciones sugeridas

$$\underbrace{30=30}$$

Finalmente notamos que al sustituir
el valor que hemos encontrado de x
nos da como resultado el mismo valor de la
premisa de la ecuación; por lo tanto, hemos
operado de manera correcta.

### 5.4 Resolución de ecuaciones

Hasta el momento ya se han dado los pasos a seguir para la resolución de ecuaciones de primer grado; los cuales, se puede sintetizar de la siguiente forma:

- Identificar la incógnita que se desea despejar.
- Realizar los despejes necesarios para encontrar el valor de la incógnita.
- Sustituir el valor encontrado en la ecuación original a manera de comprobación.

*Ejemplo 1:*

$$2x + 34 = 220$$
$$2x = 220 - 34$$
$$2x = 186$$
$$x = \frac{186}{2}$$
$$x = 93$$

Sustitución

$$2x + 34 = 220$$
$$2(93) + 34 = 220$$
$$186+34=220$$
$$220=220 \checkmark$$

*Ejemplo 2:*

$$\frac{1}{2}x + 18 = 120$$

Multiplicamos a toda la ecuación por 3 para eliminar el denominador del coeficiente de la incógnita

$$2\left[\frac{1}{2}x + 18 = 120\right]$$

$$x + 36 = 240$$
$$x = 240 - 36$$
$$x = 204$$

Sustitución

$$1/2\ x+18=120$$
$$1/2(204)+18=120$$
$$((204/2)*1\ )+18=120$$
$$102+18=120$$
$$120=120 \checkmark$$

## Ejercicios 4 y 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $9x + 16 = 43$

b) $\frac{1}{2}x + 36 = 138$

c) $17x + 5 = x + 37$

d) $2(x - 3) = 6 + x$

e) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$

## Tarea 4 y 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$

b) $3(x - 2) = 2(x - 3)$

c) $2(x + 1) - 2(1 - x) = -2x + 4$

d) $4(x - 1) - (2x + 7) = 3 - (x - 5) + 12$

e) $4(5x - 3) - 4(5x - 7) = 2$

## 6. Sistema de Ecuaciones

En matemáticas, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con una o más incógnitas. El objetivo de los sistemas es encontrar los valores de las incógnitas que satisfagan a dichas ecuaciones al mismo tiempo.

*Ejemplo:*

$$3x + 2y = 7$$

$$4x - 3y = -2$$

El ejemplo anterior es un sistema de ecuaciones de primer grado, la intención es encontrar el valor de $x$ y $y$ tal que, al sustituirlos en ambas ecuaciones, nos dé el resultado numérico que indica la igualdad.

### 6.1 Sistema de Ecuaciones de 2x2

Se le llama sistema de ecuaciones de 2x2 a aquellos que están compuestos por 2 ecuaciones de primer grado y dos incógnitas.

El sistema de ecuaciones presentado en el ejemplo anterior, es de 2x2.

### 6.2 Resolución de un Sistema de Ecuaciones de 2x2

Se llama solución de un sistema 2x2, a cualquier pareja de valores de (x,y) que sea solución de ambas ecuaciones a la vez.

Existen 4 métodos que permiten resolver un sistema de 2x2 y estos son: sustitución, igualación, reducción y un método gráfico.

### 6.2.1. Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 a través del método de sustitución, se deben de llevar a cabo los siguientes pasos:

- Paso 1: Se despeja una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones.
- Paso 2. Se sustituye el valor (provisional) de la incógnita en la otra ecuación.
- Paso 3: Se procede a resolver la ecuación.
- Paso 4: El valor que hemos encontrado, se sustituye en la ecuación con la que empezamos.
- Paso 5: Una vez obtenidos los valores de x *y* y se sustituyen en las ecuaciones originales para comprobar si hemos operado correctamente.

*Ejemplo:*

$$\begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ 4x + 8y = 32 \end{cases}$$

***Paso 1:*** Elegimos la ecuación a la que queramos despejar la incógnita, en este caso usaremos la 1 y despejaremos a *x*

$$6x - 8y = -12$$

$$6x = -12 + 8y$$

$$x = \frac{-12 + 8y}{6}$$

Hemos encontrado un valor *provisional* para x, pues este aún está en función de otra variable y por ahora no se puede simplificar más dicho resultado.

***Paso 2:*** Sustituimos el valor provisional de x en la segunda ecuación

$$4x + 8y = 32$$

$$4\left(\frac{-12 + 8y}{6}\right) + 8y = 32$$

***Paso 3:*** Se procede a resolver la ecuación

$$4\left(\frac{-12+8y}{6}\right)+8y=32$$

$$\frac{-48+32y}{6}+8y=32$$

$$\cancel{6}\left(\frac{-48+32y}{\cancel{6}}+8y=32\right)$$

$$-48+32y+48y=192$$

$$-48+80y=192$$

$$80y=192+48$$

$$80y=240$$

$$y=\frac{240}{80}$$

$$y=3$$

- **Paso 4:** El valor que hemos encontrado, se sustituye en la ecuación con la que empezamos (*la de Paso 1*).

$$6x-8y=-12$$

$$6x-8(3)=-12$$

$$6x-24=-12$$

$$6x=-12+24$$

$$6x=12$$

$$x=\frac{12}{6}$$

$$x=2$$

- **Paso 5:** Una vez obtenidos los valores de x *y* y se sustituyen en las ecuaciones originales para comprobar que hemos operado correctamente.

$$6x-8y=-12$$

$$6(2)-8(3)=-12$$

$$12-24=-12$$

$$-12=-12$$

Ahora sustituimos los valores que encontramos de x *y* y  en la ecuación 2:

$$4x + 8y = 32$$

$$4(2) + 8(3) = 32$$

$$8 + 24 = 32$$

$$32 = 32 \checkmark$$

Por lo tanto, como los valores encontrados satisfacen la premisa de los valores numéricos en ambas ecuaciones a la vez, la solución de este sistema es $x = 2$ y $y = 3$

### 6.2.2. Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 a través del método de igualación, se deben de llevar a cabo los siguientes pasos:

- Paso 1: Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Paso 2: Se igualan las expresiones obtenidas del paso 1.
- Paso 3: Se resuelve la ecuación obtenida del paso 2.
- Paso 4: El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales.
- Paso 5: Los valores obtenidos de las incógnitas se sustituyen en ambas ecuaciones para comprobar si hemos operado correctamente.

*Ejemplo:*

Resolveremos el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior, pero ahora por el método de igualación

$$\begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ 4x + 8y = 32 \end{cases}$$

- **Paso 1:** Despejamos la incógnita *x* en ambas ecuaciones (el lector puede escoger cualquiera de las 2 incógnitas).

Despejamos x de la primera ecuación

$$6x - 8y = -12$$
$$6x = -12 + 8y$$
$$x = \frac{-12 + 8y}{6}$$

Despejamos x de la segunda ecuación

$$4x + 8y = 32$$
$$4x = 32 - 8y$$
$$x = \frac{32 - 8y}{4}$$

- **Paso 2**: Igualamos las expresiones obtenidas de los despejes de *x* en ambas ecuaciones

$$\frac{-12 + 8y}{6} = \frac{32 - 8y}{4}$$

- **Paso 3**: Se resuelve la ecuación obtenida del paso 2.

$$\frac{-12 + 8y}{6} = \frac{32 - 8y}{4}$$

$$4(-12 + 8y) = 6(32 - 8y)$$

$$-48 + 32y = 192 - 48y)$$

$$32y + 48y = 192 + 48$$

$$80y = 240$$

$$y = \frac{240}{80}$$

$$y = 3$$

- **Paso 4:** Sustituimos el valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$6x - 8y = -12$$

$$6x - 8(3) = -12$$

$$6x - 24 = -12$$

$$6x = -12 + 24$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

- **Paso 5:** Los valores obtenidos de las incógnitas se sustituyen en ambas ecuaciones para comprobar que hemos operado correctamente.

Sustituimos en la primera ecuación

$$6x - 8y = -12 \; 4x + 8y = \; 27$$
$$6(2) - 8(3) = -12 \; 12 - 24 =$$
$$-12 = -12 \; 8 + 24 = \quad 33$$

Sustituimos en la segunda ecuación

$$-12 \; 4(2) + 8(3) = \qquad 33$$
$$32 = \quad 33$$

Por lo tanto, como los valores encontrados satisfacen la premisa de los valores numéricos en ambas ecuaciones a la vez, la solución de este sistema es $x = 2$ y $y = 3$

### 6.2.3 Método de reducción

Para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 a través del método de reducción, se deben de llevar a cabo los siguientes pasos:

- Paso 1: Multiplicamos alguna de las ecuaciones en la que alguno de los términos tenga signo distinto por el número que convenga, tal que los coeficientes de dichos términos lleguen a tener el mismo valor. En caso de que todos los términos tengan el mismo signo, se debe multiplicar por el número que convenga en negativo.
- Paso 2: Realizamos la operación asociada a los términos para desaparecer una de las incógnitas.
- Paso 3: Resolvemos la ecuación que resulte del paso 3.
- Paso 4: El valor obtenido se sustituye en alguna de las ecuaciones.
- Paso 5: Los valores obtenidos de las incógnitas se sustituyen en ambas ecuaciones para comprobar si hemos operado correctamente.

*Ejemplo:*

Resolveremos el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior, pero ahora por el método de reducción

$$\begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ 4x + 8y = 32 \end{cases}$$

- **Paso 1:** En este ejemplo, no es necesario multiplicar por algún número para lograr que dos términos con literales iguales tengan el mismo valor de coeficiente y con el signo contrario, pues el coeficiente asociado a la literal y en ambas ecuaciones es el mismo (8) y los signos son contrarios, por lo que proseguimos con el paso 2.

- **Paso 2:** Realizamos la operación asociada a los términos para desaparecer una de las incógnitas.

$$\begin{array}{c} 6x - \cancel{8y} = -12 \\ 4x + \cancel{8y} = 32 \\ \hline 10x + 0y = 20 \end{array}$$

- **Paso 3:** Se resuelve la ecuación obtenida del paso 2.

$$10x + 0y = 20$$

$$10x = 20$$

$$x = \frac{20}{10}$$

$$x = 2$$

- **Paso 4:** El valor obtenido se sustituye en alguna de las ecuaciones, nosotros lo haremos en la ecuación 1.

$$6x - 8y = -12$$

$$6(2) - 8y = -12$$

$$12 - 8y = -12$$

$$-8y = -12 - 12$$

$$-8y = -24$$

$$y = \frac{-24}{-8}$$

$$y = 3$$

- **Paso 5:** Los valores obtenidos de las incógnitas se sustituyen en ambas ecuaciones para comprobar que hemos operado correctamente.

| Sustituimos en la primera ecuación | Sustituimos en la segunda ecuación |
|---|---|
| $6x - 8y = -12$ | $4x + 8y = 32$ |
| $6(2) - 8(3) = -12$ | |
| $12 - 24 = -12$ $4(2) + 8(3) = 32$ | |
| $-12 = -12$ $8 + 24 = 32$ | |
| | $32 = 32$ |

Por lo tanto, como los valores encontrados satisfacen la premisa de los valores numéricos en ambas ecuaciones a la vez, la solución de este sistema es $x = 2$ y $y = 3$

### 6.2.4 Método gráfico

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resuelve en los siguientes pasos:

- Paso 1. Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.
- Paso 2. Se construye una tabla de valores de x para cada una de las expresiones resultantes del paso 1 y sustituimos los valores que le hemos asignado arbitrariamente a x.
- Paso 3. Se dibujan los puntos de los valores correspondientes a cada ecuación en el plano cartesiano.
- Paso 4. Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas $(x, y)$.

*Ejemplo:*

Resolveremos el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior, pero ahora por el método gráfico.

- **Paso 1.** Se despeja la incógnita *y* en ambas ecuaciones.

Despejamos y de la primera ecuación

$$6x - 8y = -12$$

$$4x + 8y = 32$$

$$6x$$

$$y = \frac{-12 + 6x}{-8}$$

Despejamos y de la segunda ecuación

$$-8y = -12$$

$$8y = 32 - 4x \quad +$$

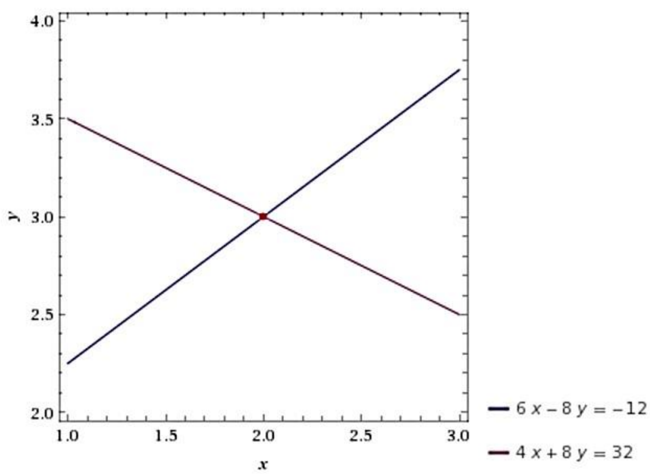
$$y = \frac{32 - 4x}{8}$$

- **Paso 2.** Se construye una tabla de valores de x para cada una de las expresiones resultantes del paso 1 y sustituimos los valores que le hemos asignado arbitrariamente a x.

| $x$ | $y = \frac{-12+6x}{-8}$ |
|---|---|
| $-2$ | 0 |
| $-1.5$ | 0.375 |
| $-1$ | 0.75 |
| 0 | 1.5 |
| 1 | 2.25 |
| 1.5 | 2.625 |
| 2 | 3 |

| $x$ | $y = \frac{32-4x}{8}$ |
|---|---|
| $-2$ | 5 |
| $-1.5$ | 4.75 |
| $-1$ | 4.5 |
| 0 | 4 |
| 1 | 3.5 |
| 1.5 | 325. |
| 2 | 3 |

- **Paso 3.** Se dibujan los puntos de los valores correspondientes a cada ecuación en el plano cartesiano.




**Paso 4**. Como ambas rectas se cortan en $x = 2$ y $y = 3$, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas $(2,3)$.

De esta forma, concluimos que usando cualquiera de los métodos de resolución de $sistemas\ de\ ecuaciones\ de\ 2x2$, debemos llegar al mismo resultado. El estudiante podrá elegir el que mejor le convenga para poder resolver un determinado sistema de ecuaciones de 2x2.

## Ejercicio 6

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de 2x2 por el método que se señala:

a) Por el método de sustitución

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

b) Por el método de igualación

$$\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 6x - y = 1 \end{cases}$$

c) Por el método de reducción $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

d) Por el método gráfico $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

## Tarea 6

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones de 2x2 por los 4 métodos (sustitución, reducción, igualación y método gráfico):

$$\begin{cases} 1 - 2(1 - 2y) = 2(x + y - 1) \\ 3 - 2(x - y) = y - 2(y - x) \end{cases}$$